

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для практичних занять, самостійної роботи, виконання контрольних і
розрахунково-графічних завдань
з розділу

«МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ»

з курсу

«БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА»

*(для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів
за напрямом 6.060101 - «Будівництво»)*

ХАРКІВ – ХНАМГ – 2012

Методичні вказівки для практичних занять, самостійної роботи, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань з розділу «Метод скінченних елементів» з курсу «Будівельна механіка» (для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 - «Будівництво») / Харк. нац. акад. міськ госп-ва; уклад.: М. А. Засядько, Л. С. Андрієвська, Н. В. Середа, О. О. Чупринін. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 32 с.

Укладачі: М. А. Засядько, Л. С. Андрієвська, Н. В. Середа, О. О. Чупринін

Рецензент: д.т.н., проф. Г. А. Молодченко

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 7 від 1.03.11 р

1. Загальні поняття

Класичні методи розрахунку споруд орієнтовані на виконання розрахунків вручну. Цим пояснюється введення різноманітних спрощуючих гіпотез, розробка різних методів, що дозволяють окремо розв'язувати статичні та кінематичні рівняння статично невизначених задач та ін. Широке розповсюдження обчислювальної техніки дозволило застосовувати універсальні методи розрахунку, коли головне значення має формалізація розрахунків, а кількість обчислень відходить на другий план. Одним із таких методів є *метод скінченних елементів* (МСЕ). Його перевагою є можливість відмови від деяких спрощуючих припущень, формалізація розрахунків та застосування матричних операцій. Останнє дає можливість стисло записати алгебраїчні операції з великими масивами чисел.

Основна ідея МСЕ полягає в тому, що континуальна за суттю конструкція наводиться як набір окремих її частин, що називаються *скінченними елементами* (СЕ). Ці елементи пов'язані між собою в скінченній кількості точок, що називаються *вузлами*.

В якості скінченного елемента береться малий елемент заданої розрахункової схеми, напружено-деформований стан якого відповідає напружено-деформованому стану всієї системи.

2. Види скінченних елементів. Ступені свободи

Розглянемо деякі скінченні елементи на прикладах.

1. В рамі, наведеній на рис. 1, *а* зусилля й переміщення є функціями координат, що визначають положення перерізу вздовж осей стержнів. Розіб'ємо стержні рами на деяку кількість скінченних елементів довжиною δ . Зусилля та переміщення будемо визначати тільки у вузлах (точках з'єднання елементів). Через ці вузлові величини можна потім визначити параметри напружено-деформованого стану системи для будь-якого перерізу в межах СЕ. Зрозуміло, чим меншими будуть скінченні елементи, тим ближче застосована дискретна схема буде до дійсної континуальної.

2. Тонка пластинка, що зазнає плоского напруженого стану. (рис. 1, *б*) є континуальною системою - переміщення її точок v та u є функціями координат x та y , які не мають розривів. Розбиваючи пластинку, наприклад, на трикутні елементи, одержуємо СЕ для плоскої задачі. Нехтуючи переміщеннями вдовж ліній контакту скінченних елементів, можна вважати суттєвими тільки переміщення u_i та v_i у вузлах СЕ.

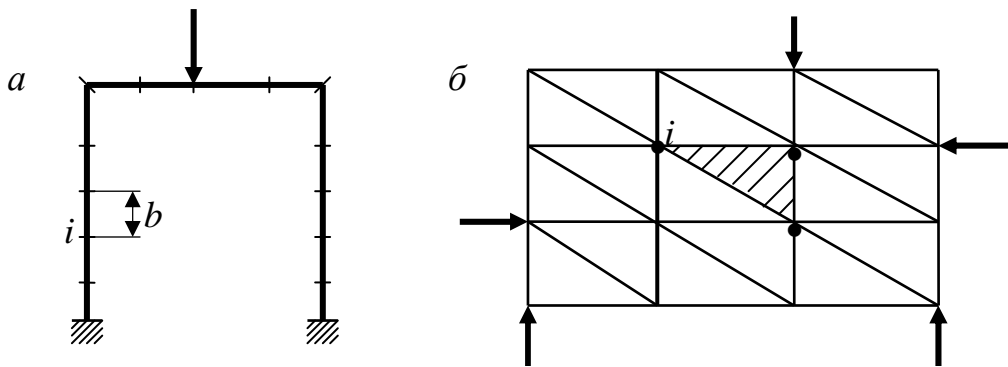


Рис. 1

3. Для пластинки (рис. 2), що розраховується на згин за технічною теорією, напружено-деформований стан визначається прогинами точок її серединної поверхні $w(x, y)$ та кутами повороту θ_x та θ_y нормалей до серединної поверхні відносно осей x та y . Розбиваючи серединну поверхню пластинки на прямокутні скінченні елементи, необхідно враховувати прогини вузлів та відповідні кути повороту. Аналогічні елементи можуть бути використані для розрахунку оболонок.

4. Незавжди визначити, що переміщення вузлів ферми повністю визначають напружено-деформований стан кожного стержня ферми.

Отже, форма скінченних елементів може бути різною для різних розрахункових схем.

Кількість переміщень вузлів скінченного елемента, які враховуються в його розрахунковій схемі становить ступінь свободи скінченного елемента.

На рис. 3 наведено окремий скінченний елемент рами. Напружено-деформований стан цього елемента цілком визначається переміщеннями $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$ його кінців, отже, він має шість ступенів свободи.

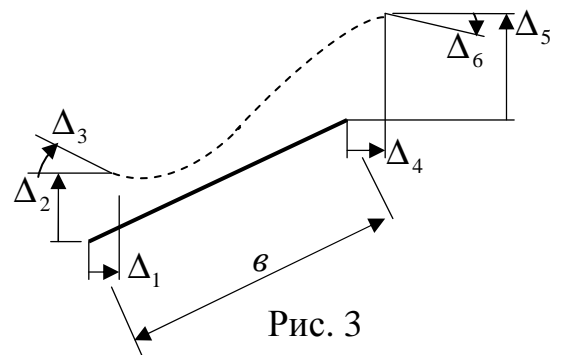


Рис. 3

Як видно з рис. 1, б, трикутний скінченний елемент тонкої пластинки, що зазнає плоского напруженого стану, має 6 ступенів свободи, оскільки кожен його вузол може зазнавати двох незалежних переміщень.

Напружено-деформований стан чотирикутного елемента тонкої зігнутої пластинки (рис. 2) визначається дванадцятьма ступенями свободи – прогинами кожного вузла та кутами повороту нормалей до серединної поверхні у вузлах.

Далі будемо розглядати тільки стержневі системи – балки, рами, ферми й, відповідно, стержневі скінченні елементи.

3. Кінематичні характеристики вузлів рами

У стержневих системах у якості вузлів зручно брати точки з'єднання стержнів, точки прикладання зосереджених сил та моментів, місця стрибкоподібної зміни жорсткості або інтенсивності розподіленого навантаження. Скінченними елементами в цьому випадку є стержні, що з'єднують сусідні вузли.

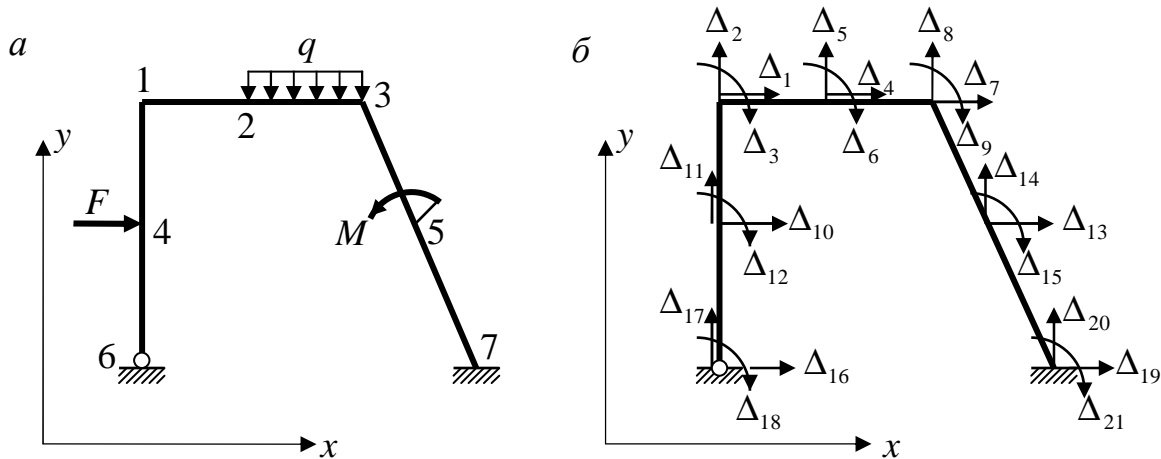


Рис. 4

Вузли нумеруються в довільному порядку. На рис. 4, *а* наведено нумерацію вузлів рами.

Для визначення взаємного розташування вузлів та їх статичних і кінематичних характеристик введемо систему координат xu , яку назвемо загальною або *глобальною*.

Переміщення жорсткого вузла є загальними для всіх стержнів, що з'єднуються в цьому вузлі, тому кожен такий вузол має три ступені свободи. Ці ступені свободи відповідають двом лінійним та одному кутовому переміщенням. Переміщення розглянутої рами в системі координат xu наведені на рис. 4, *б*. Додатні лінійні зміщення спрямовані у бік відповідних координатних осей, додатні кутові зміщення – за напрямком годинникової стрілки.

Відзначимо, що наявність в'язей, наприклад, опорних, виключає можливість відповідних переміщень. У розглянутому прикладі у вузлах 6 та 7 знаходяться відповідно шарнірно нерухома та затискуюча нерухомі опори, отже, $\Delta_{16} = \Delta_{17} = \Delta_{19} = \Delta_{20} = \Delta_{21} = 0$. Крім того, поворот шарнірного вузла 6 відсутній, існує лише поворот кінця стержня, який визначається навантаженням на стержні 4-6. Отже і $\Delta_{18} = 0$.

Зміщення $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{15}$ є основними невідомими задачі, їх можна записати у вигляді вектора

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{15} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

який називають *вектором вузлових зміщень рами*.

4. Статичні характеристики вузлів рами. Рівняння рівноваги

На кожний із вузлів рами діють зовнішні сили та внутрішні зусилля, що передаються на вузол внаслідок деформації стержнів - СЕ, які з'єднуються в цьому вузлі.

Зовнішні сили, що діють на вузол, будемо показувати у вигляді зосереджених сил та моментів, прикладених у напрямку відповідних переміщень вузлів (рис. 5).

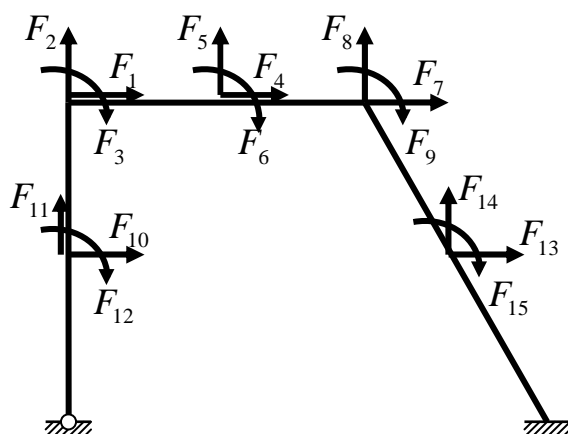


Рис. 5

Величини сил визначаються схемою завантаження рами. При цьому навантаження, розташовані на скінченних елементах, необхідно звести до сил, які прикладаються до вузлів. Для прикладу наведемо визначення вузлових сил від рівномірно розподіленого навантаження для стержня (рис. 6, а) із двома жорсткими кінцями. Ці сили можна визначити з розрахунку балки із двома затисненнями на кінцях (рис. 6, б).

Застосуємо метод початкових параметрів:

$$EIy_x = EIy_0 + EI\theta_0 x + M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24};$$

$$EI\theta_x = EI\theta_0 + M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6}.$$

На початку координат у т. А:

$x = 0$, $\theta = 0$, звідки $EI\theta_0 = 0$; $y_0 = 0$, звідки $EIy_0 = 0$; $M_0 = M_A$ та $Q_0 = R_A$.

Умови відсутності прогинів та кутів повороту на кінці балки при $x = l$ приводять до двох рівнянь відносно M_A та R_A :

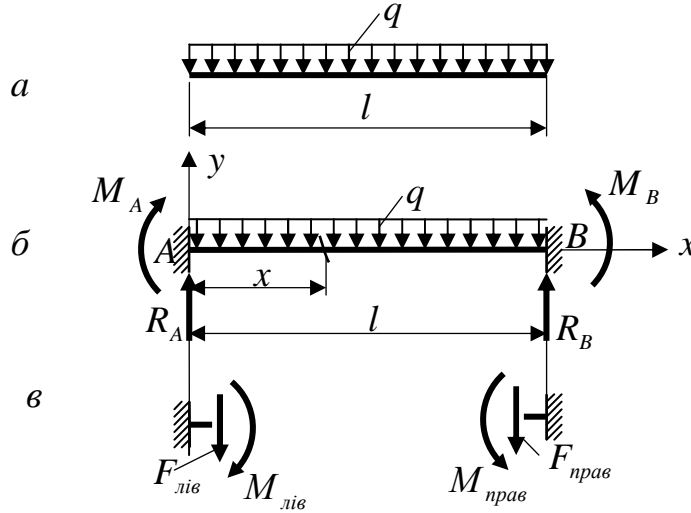


Рис. 6

$$M_A \frac{l^2}{2} + R_A \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24} = 0;$$

$$M_A l + R_A \frac{l^2}{2} - q \frac{l^3}{6} = 0,$$

звідки одержимо: $M_A = -\frac{ql^2}{12}$; $R_A = \frac{ql}{2}$.

З умов симетрії балки маємо: $M_B = M_A = -\frac{ql^2}{12}$; $R_B = R_A = \frac{ql}{2}$.

Відсікаючи лівий та правий кінці стержня (рис. 6, в), одержуємо сили та моменти, що діють на лівий та правий вузли на кінцях стержня:

$$F_{лев} = F_{прав} = -\frac{ql}{2}; M_{лев} = \frac{ql^2}{12}; M_{прав} = -\frac{ql^2}{12}.$$

Отже, для рами (рис. 4, а) маємо:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0; F_5 = -\frac{ql_{2-3}}{2}; F_6 = \frac{ql_{2-3}^2}{12}; F_7 = 0; F_8 = -\frac{ql_{2-3}}{2};$$

$$F_9 = -\frac{ql_{2-3}^2}{12}; F_{10} = F; F_{11} = F_{12} = 0; F_{13} = F_{14} = 0; F_{15} = -M; F_{16} = 0.$$

Ці сили можна записати у вигляді *вектора вузлових сил*:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{15} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

При зміщеннях вузлів рами на кінцях стержнів - СЕ з'являються реактивні сили, що діють на вузли. Повні реакції від усіх стержнів, які з'єднуються у вузлі, будемо подавати у вигляді складових R_i уздовж переміщень Δ_i . Напрямок цих складових - реакцій R_i будемо подавати відповідно до їхньої дії на стержні з боку вузла, тобто назустріч вузловим силам F_i (рис. 7).

Для лінійно-деформованої системи реакції R_i можна записати так:

$$R_i = K_{i1}\Delta_1 + K_{i2}\Delta_2 + \dots + K_{ij}\Delta_j + \dots + K_{in}\Delta_n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Механічну суть коефіцієнту K_{ij} можна визначити, якщо задати переміщення $\Delta_j = 1$, а інші переміщення вузлів нульовими. У цьому випадку $R_i = r_{ij} = K_{ij}$, тобто K_{ij} - це реакція в напрямку i -го зміщення, викликана зміщенням $\Delta_j = 1$.

Сукупність усіх реакцій системи подамо у вигляді вектора

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{15} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Тоді співвідношення (4) можна записати в матричній формі так:

$$\vec{R} = \vec{K} \cdot \vec{\Delta}. \quad (5)$$

Тут \vec{K} - матриця реакцій від одиничних зміщень вузлів, яка називається *матрицею жорсткості системи*.

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Зазначимо, що оскільки елементами матриці жорсткості є одиничні реакції, для них має місце взаємність, тобто $K_{ij} = r_{ij} = r_{ji} = K_{ji}$.

На кожен вузол рами діють у протилежних напрямках зовнішні сили F_i та реакції стержнів R_i . Оскільки рама знаходиться в рівновазі, кожен її вузол теж урівноважений, тобто

$$R_i = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

або в матричній формі

$$\vec{R} - \vec{F} = \vec{0}, \quad (7)$$

де

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \text{нульовий вектор.}$$

З урахуванням (5) співвідношення (7) набуває такого виду:

$$\vec{K} \cdot \vec{\Delta} - \vec{F} = \vec{0}. \quad (8)$$

Матричне рівняння (8) дає можливість визначити переміщення вузлів від заданого навантаження, якщо відомі елементи матриці жорсткості системи.

5. Матриця жорсткості стержня рами в локальній системі координат

Для окремого стержня рами (рис. 7, а) уведемо систему координат $x'y'$ так, що її початок знаходиться на кінці стержня, що відповідає вузлу з меншим номером. Цю точку назвемо початком стержня. Вісь x' спрямуємо вздовж стержня у бік його кінця, а вісь y' - перпендикулярно осі стержня так, щоб прямий кут був відкладений від осі x' проти годинникової стрілки. Цю систему координат називають *локальною*.

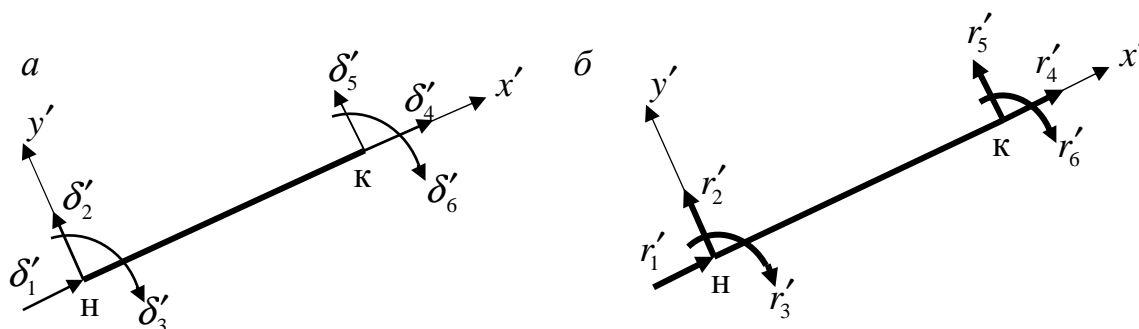


Рис. 7

Переміщення кінців стержня нумеруємо так, як показано на рис. 7, а. Аналогічно нумеруємо реакції r'_i (рис. 7, б). При цьому зауважимо, що напрямок цих реакцій відповідає їхній дії від вузла на стержень.

Вектор реакцій елемента

$$\vec{r}'_e = \begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_6 \end{bmatrix}_e$$

та вектор переміщень його кінців

$$\vec{\delta}'_e = \begin{bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \\ \vdots \\ \delta'_6 \end{bmatrix}_e$$

пов'язані між собою співвідношенням

$$\vec{r}'_e = \vec{K}'_e \cdot \vec{\delta}'_e, \quad (9)$$

де \vec{K}'_e - матриця жорсткості елемента у локальній системі координат:

$$\vec{K}'_e = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} & \cdots & K'_{16} \\ K'_{21} & K'_{22} & \cdots & K'_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K'_{61} & K'_{62} & \cdots & K'_{66} \end{bmatrix}_e. \quad (10)$$

Нагадаємо, що елемент K'_{ij} цієї матриці є реакцією r'_{ij} стержня в i -му напрямку, викликану переміщенням $\delta'_j = 1$.

Елементи матриці \vec{K}'_e залежать від умов на кінцях стержня. Визначення деяких із цих реакцій покажемо далі на прикладі стержня з обома жорсткими кінцями. Для зручності будемо розглядати стержень горизонтальним.

На рис. 8, *a* наведено стан стержня при зміщенні $\delta'_1 = 1$. Таке зміщення викликає стиск стержня. Поздовжню силу визначимо з формули Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = -1.$$

Отже:

$$N = -\frac{EA}{l}, \quad r'_{11} = \frac{EA}{l} \delta$$

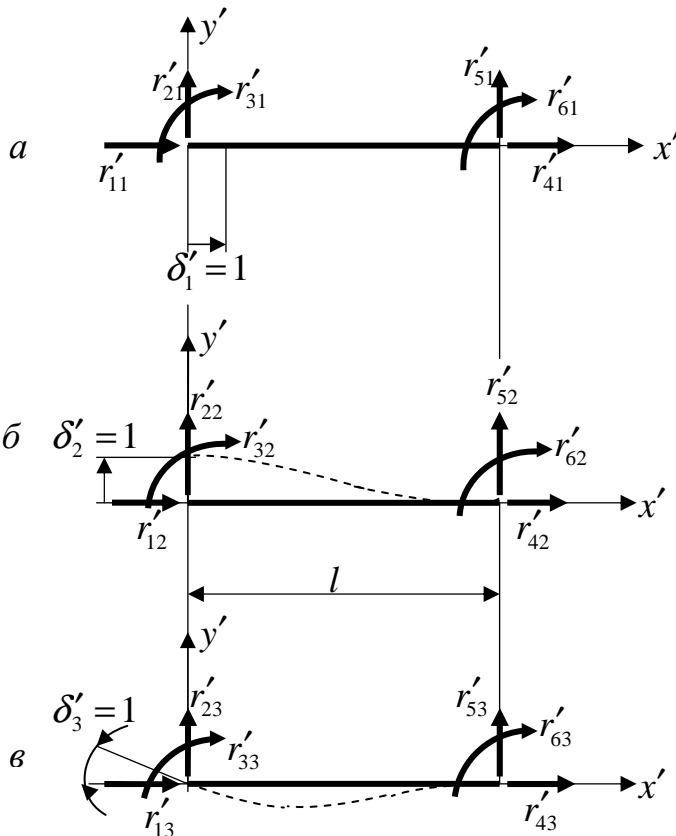


Рис. 8

$$r'_{41} = -\frac{EA}{l}, \quad r'_{21} = r'_{31} = r'_{51} = r'_{61} = 0.$$

Реакції від зміщення $\delta'_2 = 1$ (рис. 8, *б*) знайдемо за допомогою методу початкових параметрів. З урахуванням того, що на початку координат $\theta_0 = 0$; $y_0 = 1$; $M_0 = r'_{32}$; $Q_0 = r'_{22}$, маємо:

$$EI y_x = EI + r'_{32} \frac{x^2}{2} + r'_{22} \frac{x^3}{6}; \quad EI \theta_x = r'_{32} x + r'_{22} \frac{x^2}{2}.$$

З умов на правому кінці стержня $x = l$; $y_x = 0$; $\theta_x = 0$ одержимо:

$$r'_{22} = \frac{12EI}{l^3}; r'_{32} = -\frac{6EI}{l^2}$$

Далі з рівноваги стержня знаходимо

$$r'_{52} = -\frac{12EI}{l^3}; r'_{62} = -\frac{6EI}{l^2}.$$

Оскільки розтяг – стиск при переміщенні δ'_2 відсутні, $r'_{12} = r'_{42} = 0$.

Реакції при зміщеннях $\delta'_4 = 1$, $\delta'_5 = 1$ та $\delta'_6 = 1$ неважко визначити з умов симетрії.

Так само одержимо реакції від зміщення $\delta'_3 = 1$:

$$r'_{13} = r'_{43} = 0; r'_{23} = -\frac{6EI}{l^2}; r'_{33} = \frac{4EI}{l};$$

$$r'_{53} = \frac{6EI}{l^2}; r'_{63} = \frac{2EI}{l}.$$

Отже, матриця жорсткості для такого стержня має такий вигляд:

$$\bar{K}'_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}_e.$$

Аналогічно можна одержати матрицю жорсткості для стержня із шарніром на початку й затисненням на кінці:

$$\bar{K}'_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}_e.$$

При необхідності можна записати також матрицю жорсткості для стержня з шарніром на правому кінці. Слід зазначити, що матриця жорсткості

для стержня з шарніром у наведеному вигляді не може застосовуватись для розрахунку окремого стержня, оскільки визначник її дорівнює нулю.

6. Матриця жорсткості стержня рами у загальній системі координат

Переміщення вузлів рами $\vec{\Delta}$ записані у загальній - *глобальній системі координат*, отже, для її розрахунку необхідно матрицю жорсткості стержня також записувати у цій системі координат, а від переміщень та реакцій вузлів рами переходити до переміщень та реакцій на кінцях стержня у локальній системі координат.

Для перетворення переміщень та реакцій стержня із глобальної (рис. 9) у локальну систему координат слугує *матриця перетворення координат* \vec{T}_e .

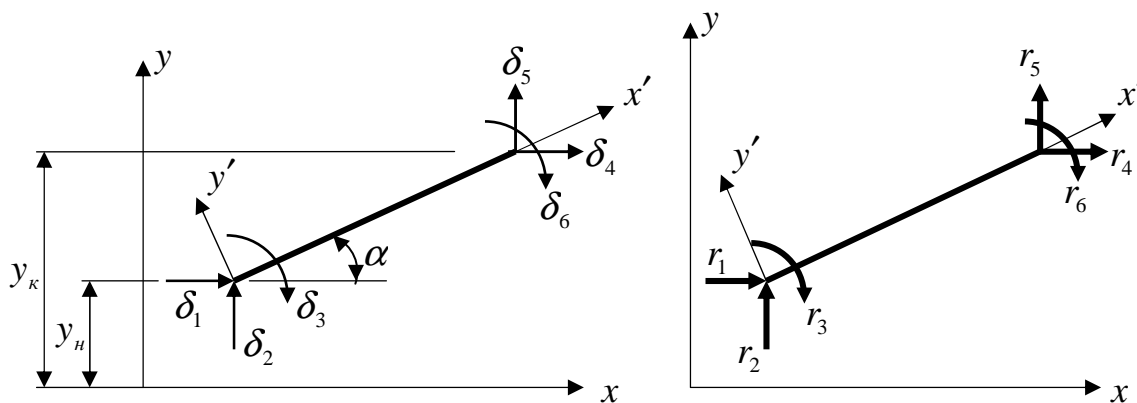


Рис. 9

Для стержня рами ця матриця має такий вид:

$$\vec{T}_e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_e. \quad (11)$$

Тригонометричні функції кута α можна виразити через координати початку та кінця стержня у глобальній системі координат (рис. 9):

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\Delta y}{l}; \cos \alpha = \frac{\Delta x}{l}; \\ \Delta y &= y_k - y_h; \Delta x = x_k - x_h; \\ l &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2}. \end{aligned}$$

За допомогою матриці \vec{T}_e можна записати

$$\begin{aligned}\vec{\delta}'_e &= \vec{T}_e \cdot \vec{\delta}_e; \\ \vec{r}'_e &= \vec{T}_e \cdot \vec{r}_e.\end{aligned}\tag{12}$$

У глобальній системі координат вектори реакцій та переміщень пов'язані між собою співвідношенням, аналогічним (9):

$$\vec{r}_e = \vec{K}_e \cdot \vec{\delta}_e,\tag{13}$$

де \vec{K}_e - матриця жорсткості елементу в глобальній системі координат. Вона пов'язана з матрицею \vec{K}'_e в локальній системі координат:

$$\vec{K}_e = \vec{T}_e^T \vec{K}'_e \vec{T}_e.\tag{14}$$

Індекс «Т» у матриці означає її транспонування, тобто заміну в ній стовпчиків рядками та навпаки.

Для стержня із двома жорсткими кінцями елементи матриці \vec{K}_e будуть такими:

$$\begin{aligned}K_{11} &= K_{44} = -K_{14} = -K_{41} = \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha; \\ K_{22} &= K_{55} = -K_{25} = -K_{52} = \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha; \\ K_{33} &= K_{66} = \frac{4EI}{l}; \\ K_{12} &= K_{21} = K_{45} = K_{54} - K_{15} = -K_{51} = -K_{24} = -K_{42} = \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha; \\ K_{13} &= K_{31} = K_{16} = K_{61} = -K_{46} = -K_{64} = -K_{34} = -K_{43} = \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha; \\ K_{35} &= K_{53} = K_{56} = K_{65} = -K_{23} = -K_{32} = -K_{26} = -K_{62} = \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha; \\ K_{36} &= K_{63} = \frac{2EI}{l}.\end{aligned}\tag{15}$$

Для стержня з затисненням на початку і шарніром у кінці:

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. (16)$$

Для стержня з шарніром на початку і затисненням у кінці:

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos^2 \alpha \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}. (17)$$

7. Матриця жорсткості елемента ферми

Стержні ферм з'єднані у вузлах шарнірами, тому при вузловому навантаженні вони зазнають тільки розтягу-стиску. У такому разі, на відміну від рам, для стержня ферми необхідно враховувати тільки лінійні переміщення вузлів та відповідні реакції. Ці переміщення та реакції для окремого стержня в глобальній системі координат наведені на рис. 10.

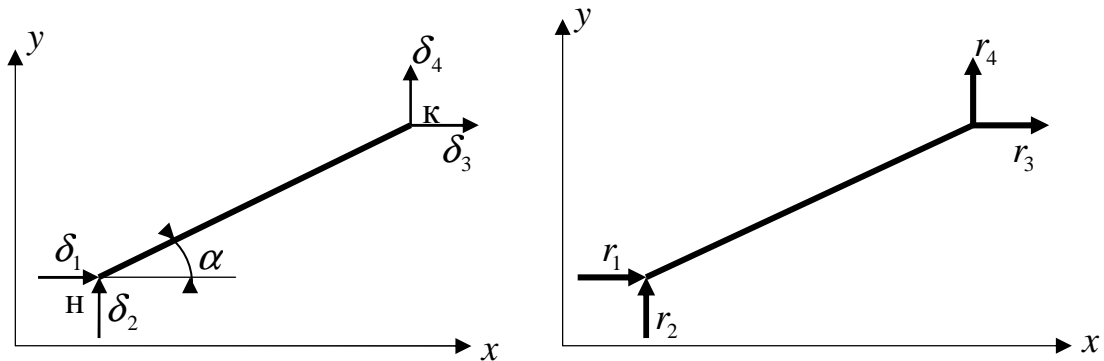


Рис. 10

Значення елементів матриці жорсткості для стержня ферми можна одержати з відповідних значень для стержня рами. Для цього необхідно виключити в останніх величини, що враховують згин стержня та змінити індекси. Таким чином отримуємо матрицю:

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha \\ \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha \\ -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha \\ -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha \end{bmatrix}. \quad (18)$$

8. Матриця жорсткості всієї системи

Довільний елемент K_{ij} матриці жорсткості (6) системи є реакцією в напрямку зміщення Δ_i , викликаною зміщенням вузла $\Delta_j = 1$. Отже, елементами, наприклад, дев'ятого стовпчика матриці жорсткості рами (рис. 4, а) будуть реакції від зміщення $\Delta_9 = 1$. На рис. 11, а наведені ці вузлові

реакції. Відзначимо, що оскільки всі переміщення, крім Δ_9 , передбачаються нульовими, деформуватися при цьому будуть лише стержні 2-3 та 3-5.

Переміщення $\Delta_9 = 1$ одночасно є переміщенням $\delta_6^{2-3} = 1$ кінця стержня 2-3 та переміщенням $\delta_3^{3-5} = 1$ початку стержня 3-5 (рис. 11, б). Реакції стержнів у вузлах підсумовуються, визначаючи таким чином вузлові реакції – елементи загальної матриці жорсткості системи. Ураховуючи, що при переміщенні Δ_9 стержні 1-2, 1-4, 4-6 та 5-7 не деформуються, реакції цих стержнів дорівнюють нулю. Отже, одержуємо такі значення елементів 9-го стовпчика загальної матриці жорсткості рами:

$$\begin{aligned} K_{4,9} &= K_{1,6}^{2-3}; K_{5,9} = K_{2,6}^{2-3}; K_{6,9} = K_{3,6}^{2-3}; \\ K_{7,9} &= K_{4,6}^{2-3} + K_{1,3}^{3-5}; K_{8,9} = K_{5,6}^{2-3} + K_{2,3}^{3-5}; K_{9,9} = K_{6,6}^{2-3} + K_{3,3}^{3-5}; \\ K_{13,9} &= K_{4,3}^{3-5}; K_{14,9} = K_{5,3}^{3-5}; K_{15,9} = K_{6,3}^{3-5}; \\ K_{1,9} &= K_{2,9} = K_{3,9} = K_{10,9} = K_{11,9} = K_{12,9} = 0. \end{aligned}$$

9. Визначення зусиль у стержнях рами

Розв'язок рівняння (8) дає вектор переміщень вузлів рами:

$$\bar{\Delta} = \bar{K}^{-1} \cdot \bar{F}. \quad (19)$$

Елементи вектора переміщень одночасно є елементами вектора переміщень кінців відповідних стержнів рами в глобальній системі координат.

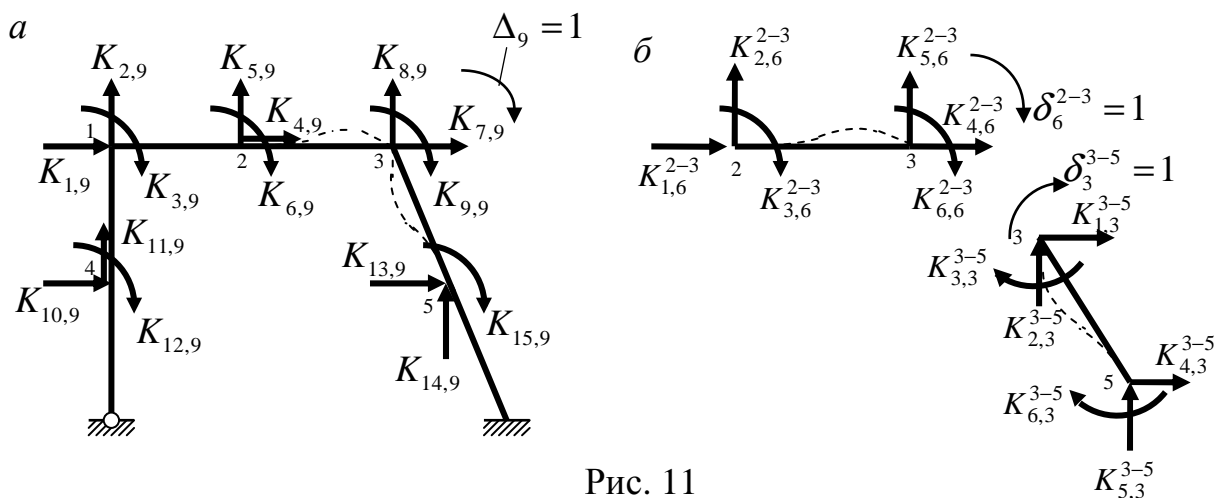


Рис. 11

Наприклад, для стержня 2-3 рами (рис. 4, а) одержуємо:

$$\bar{\delta}_{2-3} = \begin{bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}_{2-3}.$$

На рис. 12 наведені додатні напрями зусиль на кінцях елемента. Величини цих зусиль складають вектор

$$\bar{S}_e = \begin{bmatrix} -N_n \\ Q_n \\ M_n \\ N_k \\ -Q_k \\ -M_k \end{bmatrix}.$$

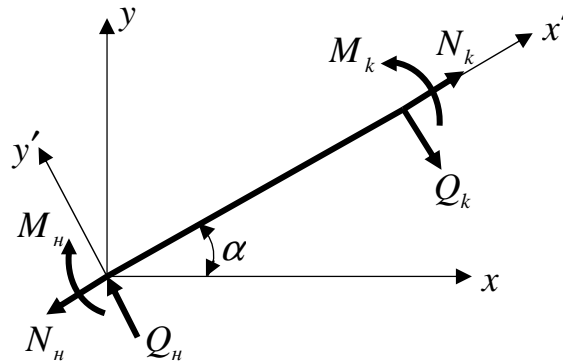


Рис. 12

Зусилля на кінцях стержня визначаються через переміщення кінців стержня та навантаження на стержні:

$$\bar{S}_e = \bar{h}_e \cdot \bar{\delta}_e + \bar{q}_e'. \quad (20)$$

Тут:

\bar{h}_e - матриця, що перетворює переміщення кінців елемента в глобальній системі координат у зусилля, що діють на початку та кінці стержня від цих переміщень;

\bar{q}_e' - вектор реакцій на кінцях стержня від навантаження на стержні в локальній системі координат.

Для стержня з жорсткими кінцями матриця \vec{h}_e має такий вигляд:

$$\vec{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ -\frac{12EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{12EI}{l^3} \cos \alpha & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{12EI}{l^3} \cos \alpha & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ \frac{12EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{12EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{12EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Для стержня з затисненням на початку та шарніром у кінці:

$$\vec{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & 0 \\ -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Для стержня з шарніром на початку і затисненням у кінці:

$$\vec{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 & \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Вектори реакцій \vec{q}_e' від рівномірно розподіленого навантаження, прикладеного в межах стержня відповідно з обома жорсткими кінцями, з затисненням на початку і шарніром у кінці та з шарніром на початку і

затисненням у кінці мають такий вигляд:

$$\bar{q}_e' = \begin{bmatrix} -\frac{q_x l_y}{2} \cos \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \sin \alpha \\ \frac{q_x l_y}{2} \sin \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \cos \alpha \\ -\frac{q_x l_y^2}{12} + \frac{q_y l_x^2}{12} \\ -\frac{q_x l_y}{2} \cos \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \sin \alpha \\ \frac{q_x l_y}{2} \sin \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \cos \alpha \\ \frac{q_x l_y^2}{12} - \frac{q_y l_x^2}{12} \end{bmatrix}; \bar{q}_e' = \begin{bmatrix} -\frac{5q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ \frac{5q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ -\frac{q_x l_y^2}{8} + \frac{q_y l_x^2}{8} \\ -\frac{3q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ -\frac{3q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (24)$$

$$\bar{q}_e' = \begin{bmatrix} -\frac{3q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ \frac{3q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ 0 \\ -\frac{5q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ \frac{5q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ \frac{q_x l_y^2}{8} - \frac{q_y l_x^2}{8} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Складові навантаження q_x та q_y та складові довжини стержня l_x та l_y беруть відповідно до рис. 13.

При відсутності навантаження на стержні вектор \bar{q}_e' буде нульовим.

10. Визначення зусиль у стержнях ферми

Після визначення переміщень вузлів, як і для рами, для кожного стержня ферми можна записати вектор переміщень його кінців у глобальній системі координат:

$$\bar{\delta}_e = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}.$$

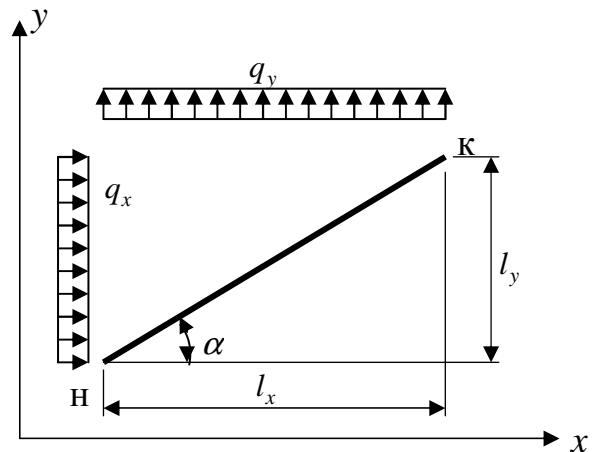


Рис. 13

Вектор зусиль на кінцях стержня ферми можна записати відповідно до рис. 14.

$$\vec{S}_e = \begin{bmatrix} -N_H \\ 0 \\ N_K \\ 0 \end{bmatrix}.$$

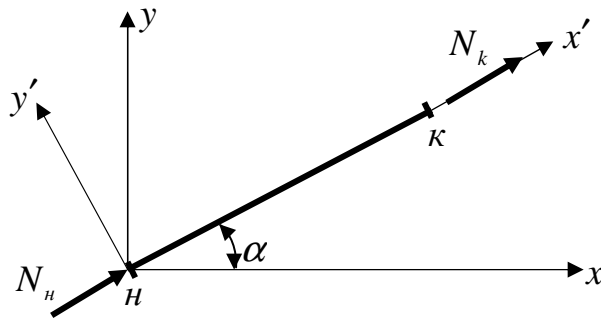


Рис. 14

Вираз для зусиль у стержні ферми має вид:

$$\vec{S}_e = \vec{h}_e \cdot \vec{\delta}_e. \quad (26)$$

Матриця перетворення переміщень у глобальній системі координат до зусиль у стержні ферми має такий вид:

$$\vec{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Зауважимо, що у межах стержня ферми зусилля не змінюється, тобто $N_H = N_K$.

11. Приклад розрахунку рами методом скінченних елементів

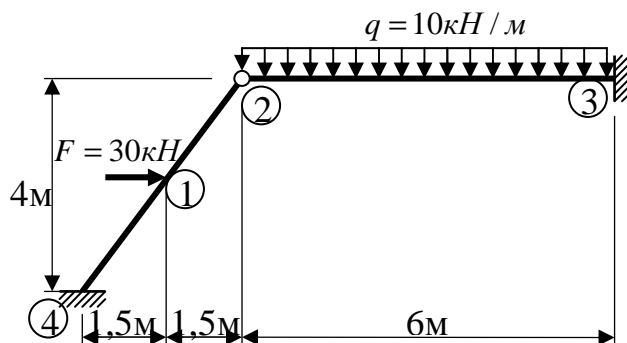


Рис. 14

Застосуємо метод скінченних елементів для розрахунку рами, наведеної на рис. 14. Чисельне співвідношення між жорсткостями на розтяг-стиск та згин для стояка становить $EA = 10EI$, жорсткості ригеля становлять відповідно $4EA$ та $40EI$.

Нумерацію вузлів показано на рис. 14, переміщення вузлів та вузлові навантаження - на рис. 15.

Складаємо вектор вузлових навантажень. навантажень. для вузлів 1 та 4 ці вектори будуть такі:

$$\vec{F}^1 = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{F}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

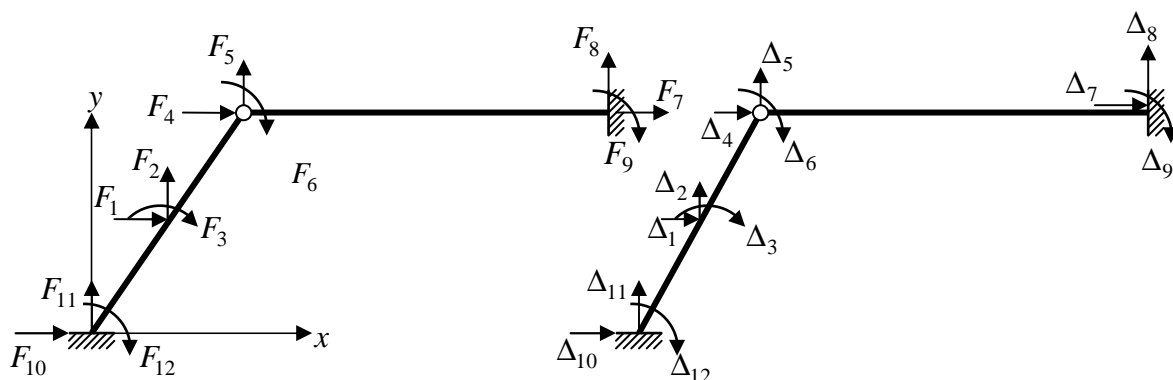


Рис. 15

Для отримання складових векторів навантажень у вузлах 2 та 3 розглянемо стержень 2-3 як балку (рис. 16) під дією розподіленого навантаження.

Реакції балки протилежні за напрямком силам, які діють на вузли на кінцях стержня (рис. 17). Отже маємо:

$$\vec{F}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -22,5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{F}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -37,5 \\ -45 \end{bmatrix}.$$

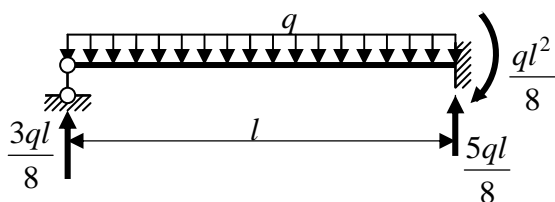


Рис. 16

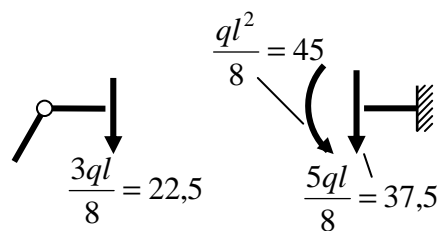


Рис. 17

Елементи векторів $\vec{F}^1, \vec{F}^2, \vec{F}^3, \vec{F}^4$ складають вектор \vec{F} вузлових навантажень рами. Виключаючи з цього вектора елементи, що відповідають нульовим переміщенням $\Delta_6, \Delta_7, \Delta_8, \Delta_9, \Delta_{10}, \Delta_{11}, \Delta_{12}$ у напрямку відсутнього

повороту шарніра та опорних закріплень у вузлах 3, 4, остаточно отримуємо:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{F}^1 \\ \vec{F}^2 \\ \vec{F}^3 \\ \vec{F}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -22,5 \\ 0 \\ -37,5 \\ -45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -22,5 \end{bmatrix}.$$

Матриці жорсткості обчислюємо починаючи з стержня 1-4. Для нього маємо обидва жорсткі кінці, жорсткості: на згин EI , на розтяг – $EA=10EI$ та геометричні характеристики:

$$\Delta x = 0 - 1,5 = -1,5; \quad \Delta y = 0 - 2 = -2; \quad l = \sqrt{(-1,5)^2 + (-2)^2} = 2,5;$$

$$\sin \alpha = \frac{-2}{2,5} = -0,8; \quad \cos \alpha = \frac{-1,5}{2,5} = -0,6;$$

Матриця жорсткості, елементи якої обчислюються за (25), буде такою:

$$\vec{K}_{1-4} = EI \begin{bmatrix} 1,932 & 1,551 & -0,768 & -1,932 & -1,551 & -0,768 \\ -1,551 & 2,836 & 0,576 & -1,551 & -2,836 & 0,576 \\ -0,768 & 0,576 & 1,6 & 0,768 & -0,576 & 0,8 \\ -1,932 & -1,551 & 0,768 & 1,932 & 1,551 & 0,768 \\ -1,551 & -2,836 & -0,576 & 1,551 & 2,836 & -0,576 \\ -0,768 & 0,576 & 0,8 & 0,768 & -0,576 & 1,6 \end{bmatrix}.$$

Стержень 1-2 має жорсткий кінець на початку (вузол 1) і шарнір у кінці (вузол 2). Жорсткість та довжина стержня такі самі, як у стержня 1-4, $\sin \alpha = 0,8$; $\cos \alpha = 0,6$. Матрицю жорсткості складаємо за (26):

$$\vec{K}_{1-2} = EI \begin{bmatrix} 1,563 & 1,828 & 0,384 & -1,563 & -1,828 & 0 \\ 1,828 & 2,629 & -0,288 & -1,828 & -2,629 & 0 \\ 0,384 & -0,288 & 1,2 & -0,384 & 0,288 & 0 \\ -1,563 & -1,828 & -0,384 & 1,563 & 1,828 & 0 \\ -1,828 & -2,629 & -1,563 & 1,828 & 2,629 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для стержня 2-3 з шарніром на початку (вузол 2) та затисненням у кінці (вузол 3) маємо: жорсткості на згин $4EI$, на розтяг – $4EA=40EI$; $\Delta_x = 6$; $\Delta_y = 0$; $l = 6$; $\sin \alpha = 0$; $\cos \alpha = 1$.

Матрицю жорсткості обчислюємо за (17):

$$\bar{K}_{2-3} = EI \begin{bmatrix} 6,6667 & 0 & 0 & -6,6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0556 & 0 & 0 & -0,0556 & -0,3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6,6667 & 0 & 0 & 6,6667 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0556 & 0 & 0 & 0,0556 & 0,3333 \\ 0 & -0,3333 & 0 & 0 & 0,3333 & 2 \end{bmatrix}.$$

Додаючи один до одного відповідні елементи матриць жорсткості стержнів, одержимо матрицю жорсткості усієї рами:

$$\bar{K} = EI \begin{bmatrix} 3,495 & 3,379 & -0,384 & -1,563 & -1,828 & 0 \\ 3,379 & 5,455 & 0,288 & -1,828 & -2,629 & 0 \\ -0,384 & 0,288 & 2,8 & -0,384 & 0,288 & 0 \\ -1,563 & -1,828 & -0,384 & 5,1037 & 1,828 & 0 \\ -1,828 & -2,629 & 0,288 & 1,828 & 2,6846 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Викреслюючи з цієї матриці шостий рядок та стовпчик, остаточно маємо:

$$\bar{K} = EI \begin{bmatrix} 3,495 & 3,379 & -0,384 & -1,563 & -1,828 \\ 3,379 & 5,455 & 0,288 & -1,828 & -2,629 \\ -0,384 & 0,288 & 2,8 & -0,384 & 0,288 \\ -1,563 & -1,828 & -0,384 & 5,1037 & 1,828 \\ -1,828 & -2,629 & 0,288 & 1,828 & 2,6846 \end{bmatrix}.$$

Далі отримуємо розв'язок рівняння (8):

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \end{bmatrix} = \bar{K}^{-1} \cdot \bar{F} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 23,18 \\ -21,92 \\ 7,75 \\ 3,77 \\ -17,46 \end{bmatrix}.$$

За (21), (22), (23) складаємо матриці перетворення переміщень кінців вузлів у зусилля на кінцях стержнів:

$$\bar{h}_{1-4} = EI \begin{bmatrix} -2,4 & -3,2 & 0 & 2,4 & 3,2 & 0 \\ 0,6144 & -0,4608 & -0,96 & -0,6144 & 0,4608 & -0,96 \\ -0,768 & 0,576 & 1,6 & 0,768 & -0,576 & 0,8 \\ 2,4 & 3,2 & 0 & -2,4 & -3,2 & 0 \\ -0,6144 & 0,4608 & 0,96 & 0,6144 & -0,4608 & 0,96 \\ -0,768 & 0,576 & 0,8 & 0,768 & -0,576 & 1,6 \end{bmatrix};$$

$$\vec{h}_{1-2} = EI \begin{bmatrix} 2,4 & 3,2 & 0 & -2,4 & -3,2 & 0 \\ -0,1526 & 0,1152 & -0,48 & 0,1526 & -0,1152 & 0 \\ 0,384 & -0,288 & 1,2 & -0,384 & 0,288 & 0 \\ -2,4 & -3,2 & 0 & 2,4 & 3,2 & 0 \\ 0,1526 & -0,1152 & 0,48 & -0,1526 & 0,1152 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{h}_{2-3} = EI \begin{bmatrix} 6,6667 & 0 & 0 & -6,6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0556 & 0 & 0 & -0,0556 & -0,3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6,6667 & 0 & 0 & 6,6667 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0556 & 0 & 0 & 0,0556 & 0,3333 \\ 0 & -0,3333 & 0 & 0 & 0,3333 & 2 \end{bmatrix}.$$

Вектори зусиль на кінцях стержнів від розподіленого навантаження на них складаємо за (24), (25):

$$\vec{q}'_{1-4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{q}'_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{q}'_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 22,5 \\ 0 \\ 0 \\ 37,5 \\ 45 \end{bmatrix}.$$

Формуємо вектори переміщень кінців стержнів у глобальній системі координат:

$$\vec{\delta}_{1-4} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_{10} \\ \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 23,18 \\ -21,92 \\ 7,75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\delta}_{1-2} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 23,18 \\ -21,92 \\ 7,75 \\ 3,77 \\ -17,46 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\delta}_{2-3} = \begin{bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 3,77 \\ -17,46 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо зусилля на кінцях стержнів за (20):

$$\vec{S}_{1-4} = \vec{h}_{1-4} \vec{\delta}_{1-4} + \vec{q}'_{1-4} = \begin{bmatrix} 14,51 \\ 16,90 \\ -18,03 \\ -14,51 \\ -16,90 \\ -24,23 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{1-2} = \vec{h}_{1-2} \vec{\delta}_{1-2} + \vec{q}'_{1-2} = \begin{bmatrix} 32,31 \\ -7,20 \\ 18,04 \\ -32,31 \\ 7,20 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{S}_{2-3} = \vec{h}_{2-3} \vec{\delta}_{2-3} + \vec{q}'_{2-3} = \begin{bmatrix} 25,13 \\ -0,97 \\ 0 \\ -25,13 \\ 0,97 \\ 5,82 \end{bmatrix}.$$

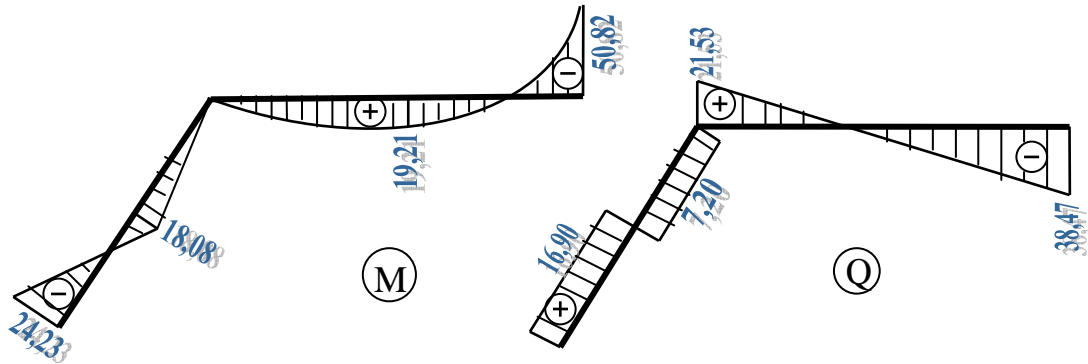


Рис. 18

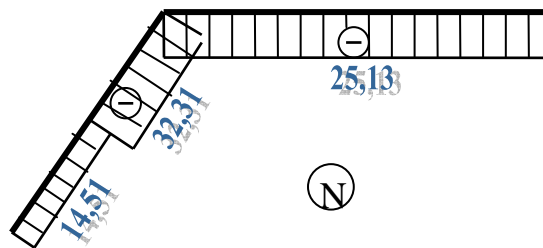


Рис. 19

За результатами розрахунків на рис. 18 і рис. 19 побудовано епюри внутрішніх зусиль.

При побудові епюр слід пам'ятати, що зусилля отримані у локальній системі координат.

12. Приклад розрахунку ферми МСЕ

Розрахуємо ферму, наведену на рис. 20 за умови однакової жорсткості ЕІ усіх її стержнів.

Пронумеруємо вузли як показано на рис. 20 і покажемо переміщення вузлів (рис. 21).

Враховуючи, що переміщення $\Delta_5 = \Delta_6 = \Delta_7 = \Delta_8 = 0$, складемо вектор вузлових переміщень та відповідний вектор вузлових сил:

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

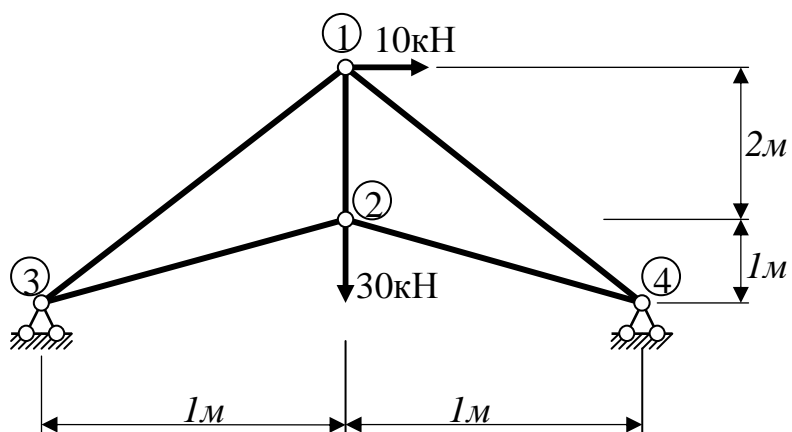


Рис. 20

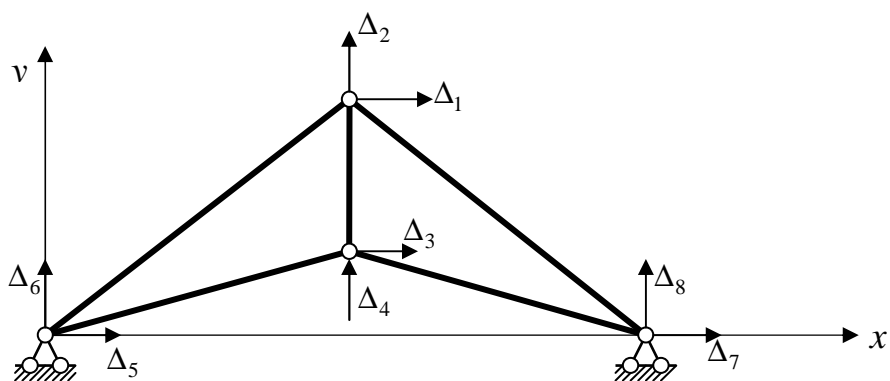


Рис. 21

Далі формуємо матриці жорсткості окремих елементів ферми.

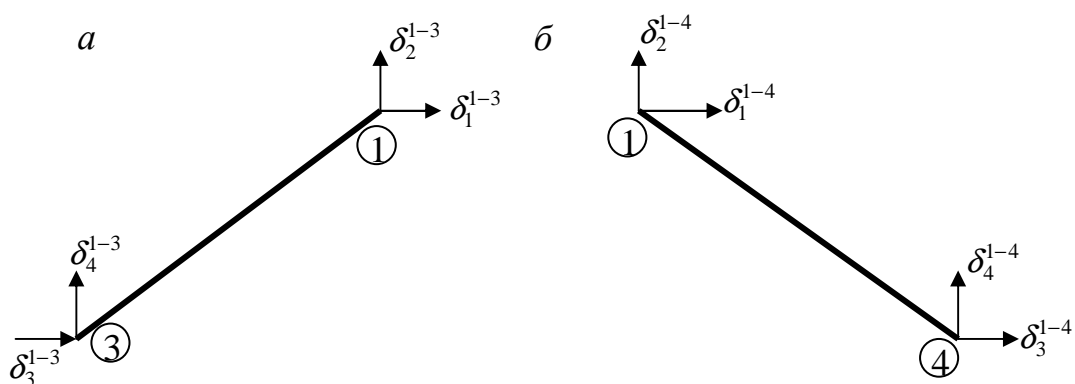


Рис. 22

Стержень 1-3 (рис. 22, а).

$$\Delta x = 0 - 4 = -4\text{ м}; \Delta y = 0 - 3 = -3\text{ м}; l = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5\text{ м};$$

$$\sin \alpha = \frac{-4}{5} = -0,8; \cos \alpha = \frac{-3}{5} = -0,6.$$

Зусилля у статично невизначній системі не залежать від абсолютного значення жорсткості елементів. Отже за умови постійної жорсткості приймемо для зручності $EI=1$ за (18) одержимо:

$$\vec{K}_{1-3} = \begin{bmatrix} 0,128 & 0,096 & -0,128 & -0,096 \\ 0,096 & 0,072 & -0,096 & -0,072 \\ -0,128 & -0,096 & 0,128 & 0,096 \\ -0,096 & -0,072 & 0,096 & 0,072 \end{bmatrix}.$$

Стержень 1-4 (рис. 22, б).

$$\Delta x = 8 - 4 = 4\text{ м}; \Delta y = 0 - 3 = -3\text{ м}; l = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5\text{ м};$$

$$\sin \alpha = \frac{-3}{5} = -0,6; \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8.$$

$$\vec{K}_{1-4} = \begin{bmatrix} 0,128 & -0,096 & -0,128 & 0,096 \\ -0,096 & 0,072 & 0,096 & -0,072 \\ -0,128 & 0,096 & 0,128 & -0,096 \\ 0,096 & -0,072 & -0,096 & 0,072 \end{bmatrix}.$$

Стержень 1-2 (рис. 23).

$$\Delta x = 4 - 4 = 0; \Delta y = 1 - 3 = -2\text{ м};$$

$$l = \sqrt{0 + (-2)^2} = 2\text{ м};$$

$$\sin \alpha = \frac{-2}{2} = -1; \cos \alpha = \frac{0}{2} = 0.$$

$$\vec{K}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

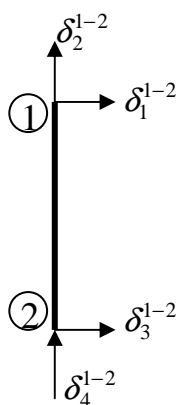


Рис. 23

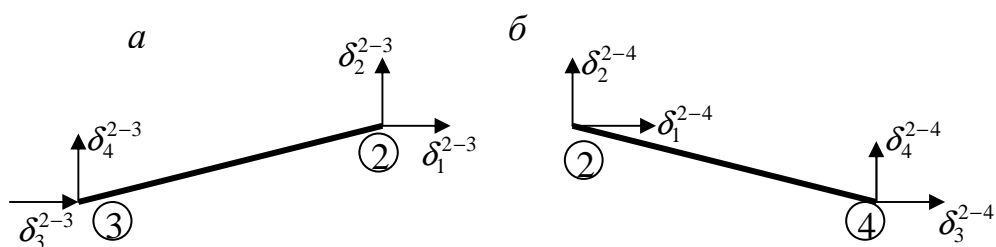


Рис. 24

Стержень 2-3 (рис. 24, а).

$$\Delta x = 0 - 4 = -4\text{м}; \Delta y = 0 - 1 = -1\text{м}; l = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = 4,123\text{м};$$

$$\sin\alpha = \frac{-1}{4,123} = -0,2425; \cos\alpha = \frac{-4}{4,123} = -0,9701.$$

$$\vec{K}_{2-3} = \begin{bmatrix} 0,2283 & 0,05706 & -0,2283 & -0,05706 \\ 0,05706 & 0,01426 & -0,05706 & -0,01426 \\ -0,2283 & -0,05706 & 0,2283 & 0,05706 \\ -0,05706 & -0,01426 & 0,05706 & 0,01426 \end{bmatrix}.$$

Стержень 2-4 (рис. 24, б).

$$\Delta x = 8 - 4 = 4\text{м}; \Delta y = 0 - 1 = -1\text{м}; l = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = 4,123\text{м};$$

$$\sin\alpha = \frac{-1}{4,123} = -0,2425; \cos\alpha = \frac{4}{4,123} = 0,9701;$$

$$\vec{K}_{2-4} = \begin{bmatrix} 0,2283 & -0,05706 & -0,2283 & 0,05706 \\ -0,05706 & 0,01426 & 0,05706 & -0,01426 \\ -0,2283 & 0,05706 & 0,2283 & -0,05706 \\ 0,05706 & -0,01426 & -0,05706 & 0,01426 \end{bmatrix}.$$

Далі обчислюємо елементи матриці жорсткості ферми:

$$K_{11} = K_{11}^{1-3} + K_{11}^{1-4} + K_{11}^{1-2} = 0,128 + 0,128 + 0 = 0,256;$$

$$K_{12} = K_{21} = K_{12}^{1-3} + K_{12}^{1-4} + K_{12}^{1-2} = 0,096 - 0,096 + 0 = 0;$$

$$K_{13} = K_{31} = K_{13}^{1-2} = 0; K_{14} = K_{41} = K_{14}^{1-2} = 0;$$

$$K_{22} = K_{22}^{1-3} + K_{22}^{1-4} + K_{22}^{1-2} = 0,072 + 0,072 + 0,5 = 0,644;$$

$$K_{23} = K_{32} = K_{23}^{1-2} = 0; K_{24} = K_{42} = K_{24}^{1-2} = -0,5;$$

$$K_{33} = K_{33}^{1-2} + K_{11}^{2-3} + K_{11}^{2-4} = 0 + 0,2286 + 0,2286 = 0,4572;$$

$$K_{34} = K_{43} = K_{34}^{1-2} + K_{12}^{2-3} + K_{12}^{2-4} = 0 + 0,05706 - 0,05706 = 0;$$

$$K_{44} = K_{44}^{1-2} + K_{22}^{2-3} + K_{22}^{2-4} = 0,5 + 0,01426 + 0,01426 = 0,02852.$$

Отже, матриця жорсткості ферми має такий вид:

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} 0,256 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,644 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0,4572 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,52852 \end{bmatrix}.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги вузлів, одержимо:

$$\vec{\Delta} = \vec{K}^{-1} \cdot \vec{F} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ -213,80 \end{bmatrix}.$$

Матриці перетворення переміщень вузлів у зусилля складаємо за (27):

$$\begin{aligned} \vec{h}_{1-3} &= \begin{bmatrix} -0,16 & -0,12 & 0,16 & 0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,16 & 0,12 & -0,16 & -0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{h}_{1-4} = \begin{bmatrix} 0,16 & -0,12 & -0,16 & 0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,16 & 0,12 & 0,16 & -0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \vec{h}_{1-2} &= \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{h}_{2-3} = \begin{bmatrix} -0,2353 & -0,05706 & 0,2353 & 0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2353 & 0,05706 & -0,2353 & -0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \vec{h}_{2-4} &= \begin{bmatrix} 0,2353 & -0,05706 & -0,2353 & 0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2353 & 0,05706 & 0,2353 & -0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Формуючи вектори переміщень вузлів для кожного елемента, обчислюємо за (26) зусилля:

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{1-3} &= \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{2-3} = \vec{h}_{1-3} \cdot \vec{\delta}_{1-3} = \begin{bmatrix} 13,58 \\ 0 \\ -13,58 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \vec{\delta}_{1-4} &= \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{1-4} = \vec{h}_{1-4} \cdot \vec{\delta}_{1-4} = \begin{bmatrix} 26,17 \\ 0 \\ -26,17 \\ 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_{1-2} &= \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ -213,8 \end{bmatrix}; \quad \bar{S}_{1-2} = \bar{h}_{1-2} \cdot \bar{\delta}_{1-2} = \begin{bmatrix} -23,91 \\ 0 \\ 23,91 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \bar{h}_{2-3} &= \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -213,8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{S}_{2-3} \bar{h}_{2-3} \cdot \bar{\delta}_{2-3} = \begin{bmatrix} 12,2 \\ 0 \\ -12,2 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \bar{\delta}_{2-4} &= \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -213,8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{S}_{2-4} = \bar{h}_{2-4} \cdot \bar{\delta}_{2-4} = \begin{bmatrix} 12,2 \\ 0 \\ -12,2 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Отже, зусилля в стержнях ферми від заданого навантаження такі:
 $N_{1-3} = -13,58 \text{ кН}; N_{1-4} = -26,17 \text{ кН}; N_{1-2} = 23,91 \text{ кН}; N_{2-3} = N_{2-4} - 12,2 \text{ кН}.$

Запитання для самоконтролю

1. У чому суть методу скінченних елементів?
2. Які переваги МСЕ перед класичними методами?
3. Що називають скінченним елементом?
4. Наведіть приклади скінченних елементів.
5. Як визначається кількість ступенів свободи скінченного елемента?
6. Скільки ступенів свободи має СЕ рами? Ферми? Трикутного елемента тонкої зігнутої пластинки? Трикутного елемента плоскої задачі теорії пружності?
7. Що приймають у якості вузлів рами?
8. Які величини приймають у якості кінематичних характеристик вузлі рами?
9. Що є статичними характеристиками вузлів рами? Як вони визначаються?
10. Яка матриця називається матрицею жорсткості?
11. Які величини є елементами матриці жорсткості? Яку властивість мають елементи матриці жорсткості?
12. Наведіть рівняння рівноваги вузлів у матричній формі.
13. Яку систему координат називають локальною? – глобальною?
14. Який зв'язок існує між векторами реакцій на кінцях елемента та переміщеннями?
15. Який розмір має матриця жорсткості елемента рами? Ферми?
16. Як пов'язані між собою вектори переміщень у локальній та глобальній системах координат?

17. Для чого слугує матриця перетворення координат?
18. Як пов'язані між собою матриці жорсткості в локальній та глобальній системах координат?
19. Як складається матриця жорсткості системи?
20. Як визначається вектор переміщень вузлів системи?
21. Як визначаються зусилля на кінцях стержня рами після визначення переміщень?
22. Як визначаються зусилля в стержнях ферми через переміщення його кінців?

ДЖЕРЕЛА

1. Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології: Підручник / за заг. ред. д.т.н., проф. В.А. Баженова. – К.: Каравела, 2009. – 696 с.
2. Чихладзе Э.Д. Строительная механика: Учебник для студентов высших учебных заведений. – Харьков: УкрГАЗТ, 2004. – 305 с.
3. Строительная механика. Стержневые системы: учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников; Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для практичних занять, самостійної роботи, виконання контрольних і
розрахунково-графічних завдань
з розділу

«МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ»

з курсу

«БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА»

(для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів
за напрямом 6.060101 - «Будівництво»)

Укладачі: **ЗАСЯДЬКО** Микола Андрійович,
АНДРІЄВСЬКА Людмила Станіславівна,
СЕРЕДА Наталія Василівна,
ЧУПРИНІН Олександр Олексійович

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2011, поз. 193М

Підп. до друку 21.04.2011
Друк на ризографі
Тираж 50 пр.

Формат 60*84/16
Ум. друк. арк. 2,0
Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011р.